128	Barycentres. Applications.	Enveloppe convexe, caract. partie convexe.	Mercier, De Biasi, Monier Géo.

<u>Prérequis</u>: espace affine, repère affine, app. affine, affinité.

Soit E un espace affine sur ℝ, d'espace vect. associé $\vec{E}$.

I. Barycentre.

A. Fonction vectorielle de Leibniz. Bia p.188.

(Avec les notation α_i de Mercier et Monier.)

Def 1: Etant donnés n points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$ de E, on appelle **fonction vectorielle de Leibniz** l'application $\vec{f}: E\to\vec{E}$ qui à M associe $\vec{f}(M)=\sum_{1\le i\le n}\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$.

Prop 1: L'application $\vec{f}$ est **constante** si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$,

et **bijective** sinon.

B. Barycentre de n points pondérés. Mercier.

Def 2: Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$, le **barycentre** du système de n points pondérés $(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$ est l'unique point G vérifiant: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$.

Ce point G est aussi défini par : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$,

où O désigne un point quelconque de E.

On notera $G=bary\left((A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}\right)$.

C. Premières propriétés. Mercier.

Prop 2: Avec les notations précédentes,

1) Homogénéité des coefficients: ∀λ∈ℝ*, G est aussi le barycentre de $(A_1,\lambda\alpha_1),\dots,(A_n,\lambda\alpha_n)$.

2) Commutativité: ∀σ∈S_n, G est aussi le barycentre de $\left(A_{\sigma(1)},\lambda_{\sigma(1)}\right),\dots,\left(A_{\sigma(n)},\lambda_{\sigma(n)}\right)$.

3) Associativité: Si $J\subset[\![1;n]\!]$ et si $\sum_{i\in J}\alpha_i\neq 0$, alors G est aussi le barycentre de $\{(A_i,\alpha_i)/i\notin J\}\cup bary\{(A_j,\alpha_j)/j\in J\}$.

<u>Exemples</u>: (Monier)

La **droite** (AB), où A≠B, est l'ensemble des $bary\{((A,t);(B;1-t))/t\in\mathbb{R}\}$.

Le **plan** (ABC), A, B, C distincts est l'ensemble des $bary\{((A,\alpha);(B;\beta);(C,\gamma))/(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\alpha+\beta+\gamma=1\}$

Def 3: On appelle **isobarycentre** de $A_1,\dots,A_n$ le barycentre de $(A_1,1),\dots,(A_n,1)$.

<u>Exemple</u>:Le **milieu** de [AB] est l'isobarycentre de A et B.

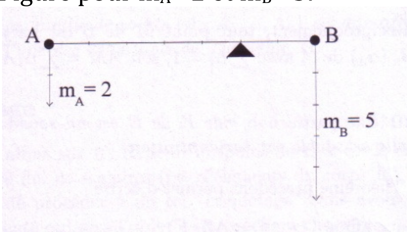
<u>Application 1</u>: (Monier ou De Bia) Les trois **médianes** d'un triangle sont concourantes.

<u>Application 2</u>: (Mercier p.107) **Th. de Desargues**: Soient D, D', D'' concourantes en O, et deux points sur chacune, A, B sur D; A', B' sur D'; A'', B'' sur D''. Si on note: L=(AA')⋂(BB'); M=(AA'')⋂(BB''); N=(AA'')⋂(BB''), alors L, M, N sont alignés.

<u>Application 3</u>: (Mercier) **Statique du solide.** Le centre de gravité de n points matériels $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de masses respectives $(\alpha_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est $G=bary\left((A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}\right)$.

Dans le cas de deux solides ponctuels (A, m_A) et (B, m_B) situés aux deux extrémités d'une tige de masse négligeable, on a le bilan des forces à l'équilibre: $\vec{F_A}=m_A.\vec{g}$ appliquée en A, $\vec{F_B}=m_B.\vec{g}$ appliquée en B, et $\vec{F}=-(m_A+m_B).\vec{g}$ la réaction du support au pt de contact S. L'équilibre se traduit aussi par l'égalité des moments: $SA\times m_A=SB\times m_B$, ou $m_A.\overrightarrow{SA}+m_B.\overrightarrow{SB}=\vec{0}$.

Figure pour m_A=2 et m_B=5:



II. Application aux espaces affines.

A. Sous-espaces affines (Mercier).

Th 1: Le **sous-espace affine** engendré par une partie non vide $\mathcal{A}$ de E est égal à l'ensemble des barycentres des points de $\mathcal{A}$.

Ce théorème généralise les exples de la dte et du plan.

Th 2: Une partie non vide $\mathcal{F}$ de E est un sous-espace affine ssi elle est **stable par barycentration.**

"Stable par barycentration de 2 pts" suffit.

B. Coordonnées barycentriques (De Biasi).

En particulier, un espace affine est l'ensemble des barycentres de points de l'un de ses repères affines $\mathcal{R}$.

Def 4: Pour tout point M∈E, les coefficients pondérant les points de R sont appelées **coordonnées barycentriques** de M par rapport à R (1).

<u>Exemple</u>: (Monier ex2.2.12) Si A, B, C sont non alignés, les coordonnées barycentriques de l'othocentre H de ABC dans le repère (A,B,C) sont:

$\left(\tan\hat{B}+\tan\hat{C};\tan\hat{C}+\tan\hat{A};\tan\hat{A}+\tan\hat{B}\right)$.

C. Convexité (Mercier).

Def 5: Soient A et B deux points de E on appelle **segment** d'extrémités A et B l'ensemble:

$[AB]=\left\{M\in E/\exists t\in[0,1]\ \ \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}\right\}$.

Def 6: $\mathcal{C}$⊂E est **convexe** ssi ∀A, B∈$\mathcal{C}$, [AB]⊂$\mathcal{C}$.

L'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$⊂E est l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$; c'est aussi le plus petit d'entre eux.

Th 3: L'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des **barycentres à coefficients positifs** de points de $\mathcal{A}$.

Prop 3: Une partie non vide de E est convexe ssi elle est stable par barycentration à coefficients positifs.

D. Applications affines (Mercier) .

Th 4: Une application est affine ssi elle conserve le barycentre.

Prop 4: Si $f : E \to F$ affine et $\mathcal{A}\subset$E, $f\left(Aff\left(A\right)\right) = Aff\left(f\left(A\right)\right)$.

III. Applications à la géométrie Euclidienne.

Ici, E est un espace affine Euclidien.

A.Fonction scalaire de Leibniz (Mercier p.190).

Def 7: Etant donnés n points pondérés $\left(A_i, \alpha_i\right)_{1\le i\le n}$ de E, on appelle **fonction scalaire de Leibniz** l'application $\vec{f} : E \to \mathbb{R}$ qui à M associe $f\left(M\right) = \sum_{1\le i\le n} \alpha_i MA_i^{\ 2}$.

Ne pas confondre la f° vectorielle et la f° scalaire.

Prop 5: Formules de Leibniz.

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, $f\left(M\right) = f\left(O\right) + 2\overrightarrow{MO}.\left(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i}\right)$.

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, $f\left(M\right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)MG^2 + f\left(G\right)$, où G est l'isobarycentre des $\left(A_i\right)_{1\le i\le n}$.

Prop 6: lignes de niveau $E_k = \{M \in E \,/\, f\left(M\right) = k\}$

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, posant $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$, E_k est un hyperplan affine perpendiculaire à $\vec{v}$.

Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, posant $k' = MG^2$, on a trois cas:

- si k'>0, E_k est l'hypersphère de ctre G et de ray. $\sqrt{k'}$
- si k'=0, E_k={G}
- si k'>0, E_k=Ø.

B. Isométries laissant invariant un ensemble de points (Mercier p.278).

Th. 5: Toute isométrie laissant une partie finie $P = \{A_0, \ldots A_n\}$ globalement invariante laisse fixe l'isobarycentre O de $P = \{A_0, \ldots A_n\}$.

<u>Application</u>: recherche des isométries laissant globalement invariant un polygone régulier.
(Mercier p.288)

IV. Notes.

(1) Les coords. baryc. sont définies à une constante multiplicative près, mais si l'on impose que leur somme soit 1 (syst. de coords normalisé), alors il y a unicité.

Rapport de jury 2010 *: ici aussi les applications manquent : on pourrait évoquer la détermination de lignes de niveau, ou encore le théorème de Gauss-Lucas (relatif à l'enveloppe convexe).*

<u>Th. de Gauss-Lucas</u>: Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors tout zéro de P' appartient à l'enveloppe convexe de l'ensemble des zéros de P.
Démontré en exercice dans Gourdon ALG, ex.6 p.66.